

Информатика

Лекция 12. «Итерационные циклы»

Сидоров С.Г.

sgs@vvs.ispu.ru

Задача 1

Разработать алгоритм решения и составить программу для вычисления суммы ряда:

$$Z = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Варианты решения

1. Вычисление с использованием заданной формулы
 - Недостаток: необходимость вычисления степени и факториала на каждой итерации
2. Вычисление с помощью рекуррентной формулы
 - Достоинство: упрощение формулы члена ряда

Обозначения

Введем следующие обозначения:

Z – сумма ряда

Y – член ряда

n – номер члена ряда

E – заданная точность

R – рекуррентное соотношение

Нахождение рекуррентного соотношения

Разделим n -й член ряда $Y_n = (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

на $n-1$ член ряда: $Y_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

Нахождение рекуррентного соотношения

$$R = \frac{Y_n}{Y_{n-1}} = \frac{(-1)^n \frac{x^n}{n!}}{(-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}$$

Нахождение рекуррентного соотношения

- Единица в четной степени деленная на единицу в нечетной степени даст -1
- Единица в нечетной степени деленная на единицу в четной степени даст -1

Нахождение рекуррентного соотношения

Выражение упрощается:

$$R = - \frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}$$

Нахождение рекуррентного соотношения

Выражение упрощается:

$$R = \frac{x^n (n-1)!}{n! x^{n-1}}$$

Нахождение рекуррентного соотношения

Выражение упрощается:

$$R = \frac{x^n}{x^{n-1}} \frac{(n-1)!}{n!}$$

Нахождение рекуррентного соотношения

Выражение упрощается:

$$R = \frac{x^n}{x^{n-1}} \frac{(n-1)!}{n(n-1)!}$$

Нахождение рекуррентного соотношения

Степени и факториалы сокращаются:

$$R = -\frac{x}{n}$$

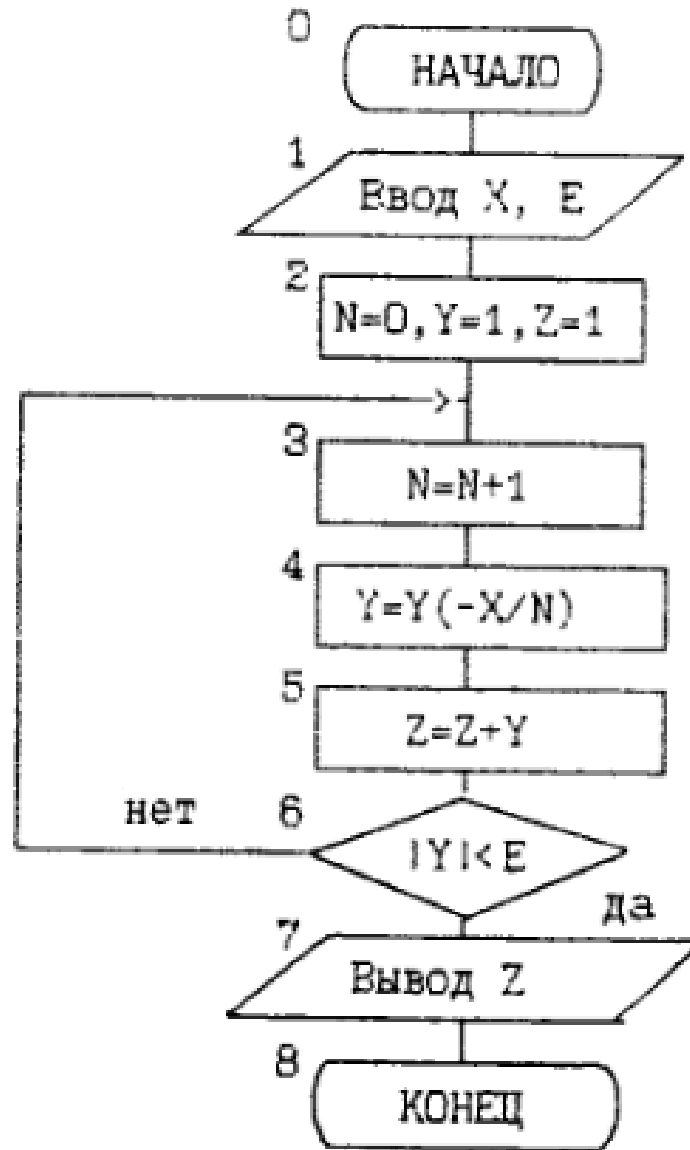
Рекуррентная формула

$$Y_n = Y_{n-1} \cdot \left(-\frac{x}{n} \right)$$

Начальные значения

- Первый член ряда нельзя вычислить по рекуррентной формуле, т.к. нет предыдущего члена ряда
- Принимаем первый член ряда за начальное значение суммы ряда
- Для вычисления первого члена ряда его номер (**для данной задачи!**) должен быть равен 0

Алгоритм



Программа

```
Program LR6_1;
var  X :real;
     E :real;      {точность}
     Y :real;      {член ряда}
     Z :real;      {сумма ряда}
     N :integer;   {номер члена ряда}
begin
  Write('X=');  Readln(X);
  Write('E=');  Readln(E);
  N:=0;  Y:=1;  Z:=1;
  Repeat
    N:=N+1;
    Y:=Y*(-X/N);
    Z:=Z+Y;
  Until Abs(Y)<E;
  Writeln('Z=',Z:8:5);
end.
```


Задача 2

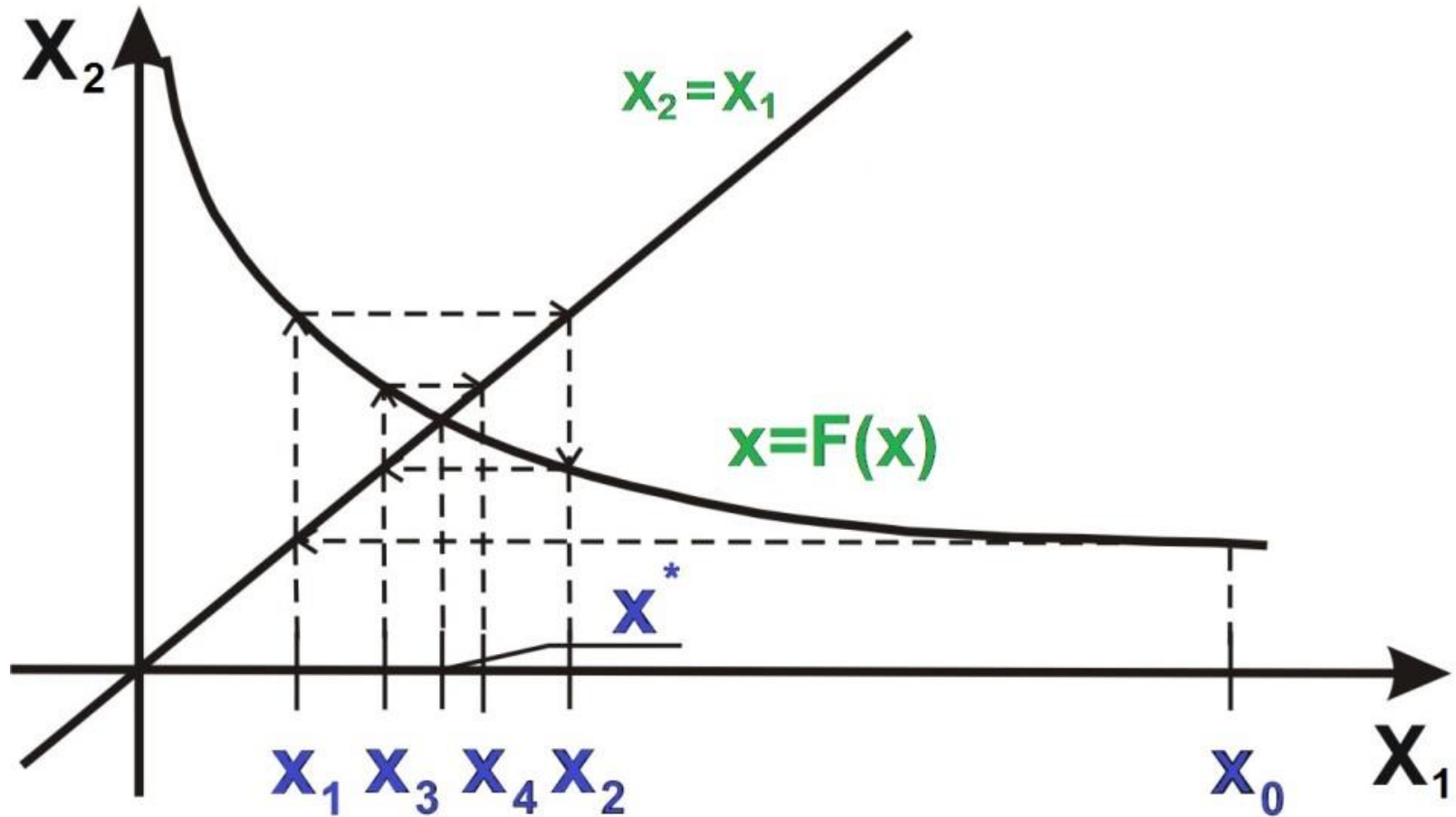
Методом итераций вычислить корень уравнения вида $f(x)=0$, расположенный на интервале $[1,2]$ с заданной погрешностью. Определить число итераций необходимое для нахождения корня.

$$x^4 - x - 1 = 0$$

Метод последовательных приближений (итераций)

- Заменяем исходное уравнение вида $f(x)=0$ на уравнение вида $F(X)=X$
- Выбираем произвольное X из заданного интервала $[A, B]$ и подставляем на вход функции $F(X)$, получаем новое значение X
- Полученное значение вновь подставляем на вход функции $F(X)$, повторяем подстановки до тех пор, пока значения X не станут очень близкими

Метод последовательных приближений (итераций)

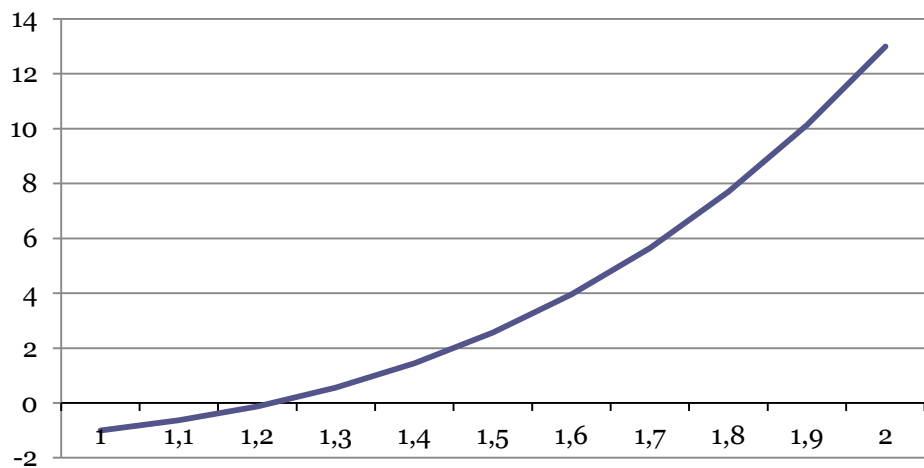


Метод последовательных приближений (итераций)

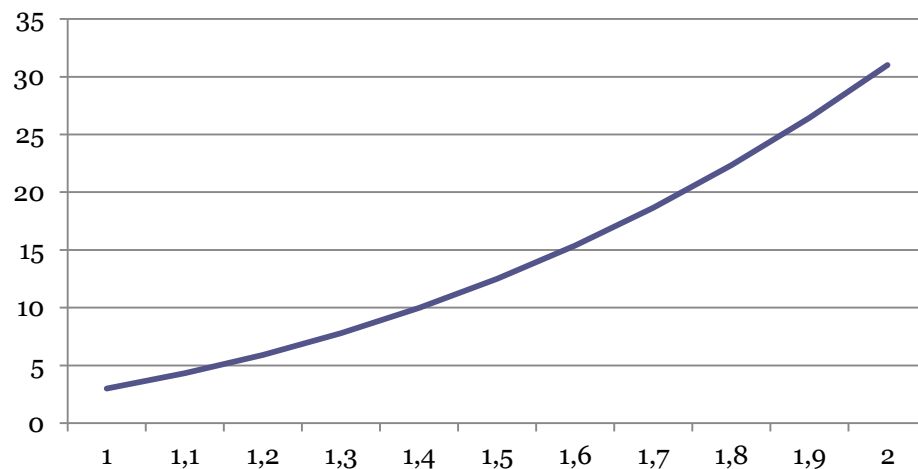
- В качестве функции $F(X)=X$ выбираем функцию $X=X-f(X)/K$ где K – коэффициент сходимости
- Для обеспечения сходимости должны быть выполнены два условия:
 - Знак K должен совпадать со знаком производной $f'(X)$
 - Величина K должна быть больше половины максимального значения производной $f'(X)$ на заданном интервале $[A, B]$

Вид функции и производной

$f(x)$



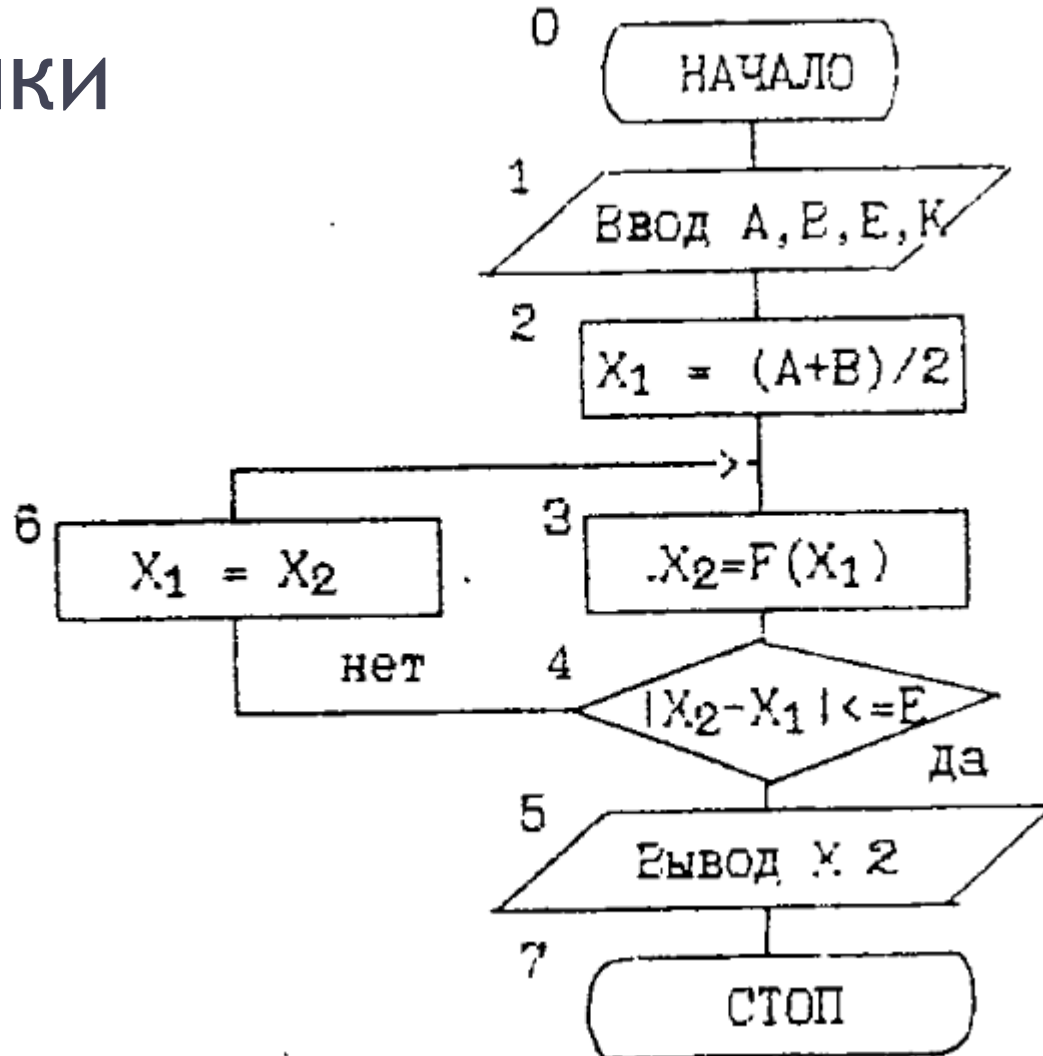
$f'(x)$



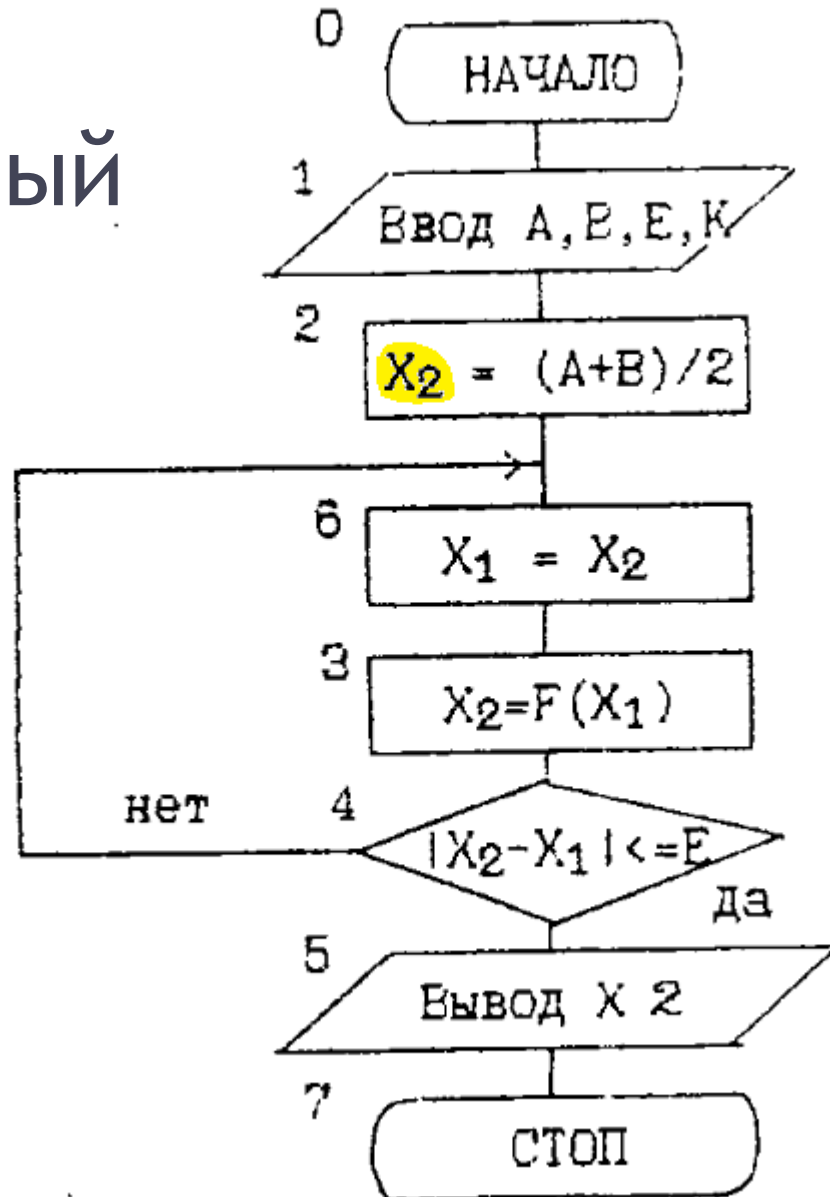
Определение коэффициента СХОДИМОСТИ

- Функцию $X^4 - X - 1 = 0$ заменяем на функцию $X = X - (X^4 - X - 1)/K$
- Производная $f'(X) = 4X^3 - 1$
- Значение производной при $X=1$ равно **3**
- Значение производной при $X=2$ равно **31**
- Значение производной положительно, значит знак K больше нуля
- Значение K должно быть больше $31/2 = 15,5$
- Принимаем $K=16$

Алгоритм из методички



Алгоритм модифицированный



Программа

```
Program LR6_2;
var  A   :real;      {левая граница интервала}
     B   :real;      {правая граница интервала}
     E   :real;      {точность}
     K   :real;      {коэффициент сходимости}
     X1  :real;      {значение X на входе функции}
     X2  :real;      {значение X на выходе функции}
     N   :integer;   {число итераций}
begin
  Writeln('Введите A,B,E,K');  Readln(A,B,E,K);
  X2:=(A+B)/2;  N=0;
  Repeat
    X1:=X2;
    X2:=X1-(4*X1-X1-1)/K;
    N=N+1;
  Until Abs(X2-X1)<=E;
  Writeln('X=',X2:8:5,'  N=',N);
end.
```